A radioaktív bomlás kinetikája

Összetett bomlások

Összetett bomlások: elágazó bomlás

$$A \left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{\lambda_1} B_1 \\ \\ \xrightarrow{\lambda_2} B_2 \end{array} \right.$$

$$^{40}K \left\langle \begin{array}{l} \xrightarrow{\beta^-} {}^{40}Ca \\ \\ \xrightarrow{\beta^+, EX} {}^{40}Ar \end{array} \right.$$

$$N = N_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Levezetés megtalálható az Izotópia I. 4. fejezetében!

U-238 bomlási sor fontosabb tagjai

U-238

↓ α 4,5e9 év

Th-234

↓ β 24,1 nap

Pa-234

↓ β 1,2 min

U-234

↓ α 2,5e5 év

Th-230

↓ α 8e4 év

Ra-226

↓ α 1620 év

Rn-222

↓ α 3,825 nap

Po-218

↓ α 3,05 min

Pb-214

↓ β 26,8 min

Bi-214

α ↙ ↘ β 19,8 min

Tl–210 Po–214

β↘ ↙ α

1,3 min 1,6e–4 s

Pb–210

↓ β 21,6 év

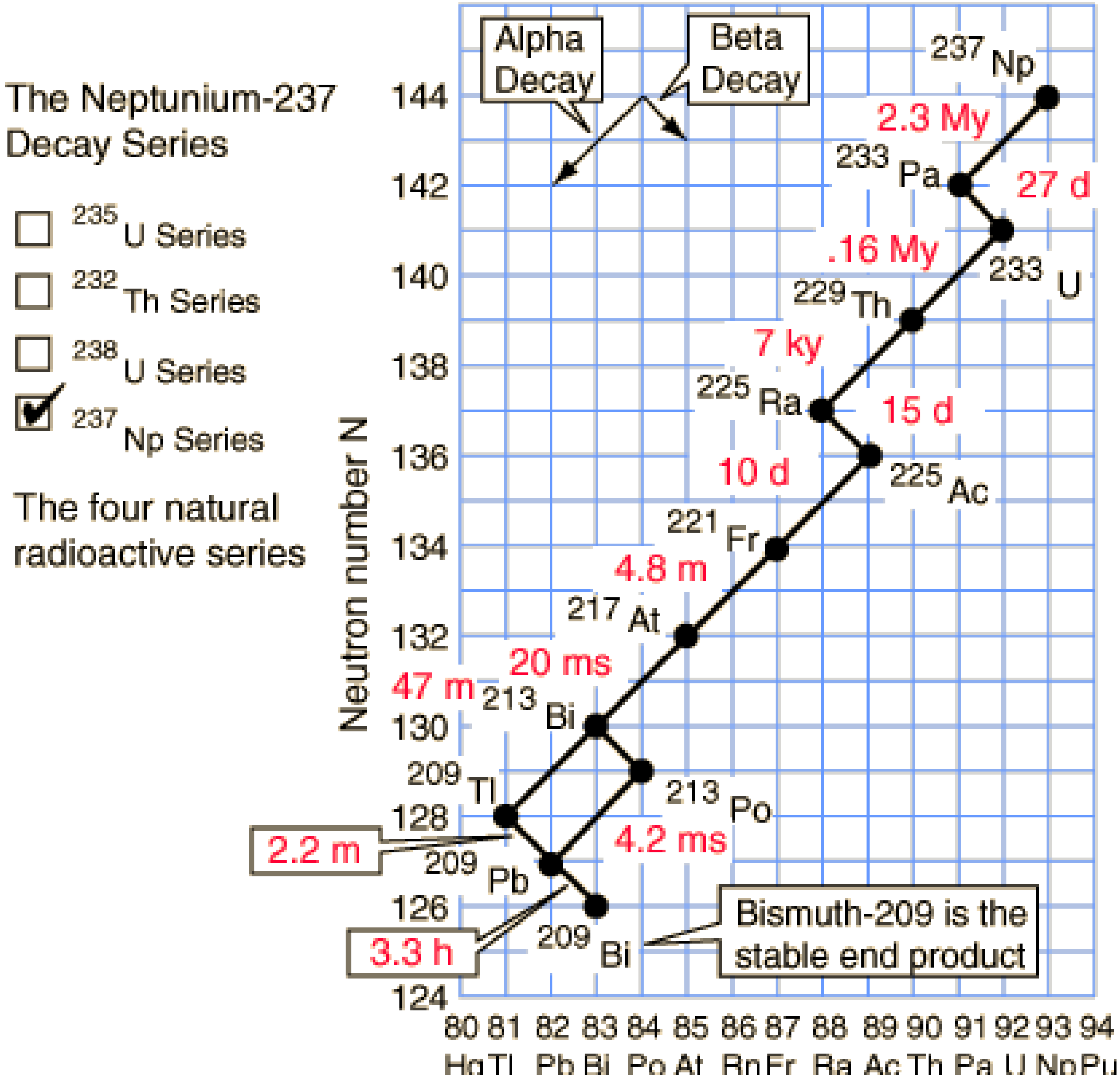
Bi–210

↓ β 5,013 nap

Po–210

↓ α 138,4 nap

Pb–206



The Neptunium-237 Decay Series
235 U Series
232 Th Series
238 U Series
237 Np Series
The four natural radioactive series
Alpha Decay
Beta Decay
Neutron number N
144
142
140
138
136
134
132
130
128
126
124
237 Np
2.3 My
233 Pa
27 d
.16 My
233 U
229 Th
7 ky
225 Ra
15 d
10 d
225 Ac
221 Fr
4.8 m
217 At
20 ms
47 m
213 Bi
209 Tl
213 Po
2.2 m
4.2 ms
209 Pb
3.3 h
209 Bi
Bismuth-209 is the stable end product
80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94
Hg Tl Pb Bi Po At Rn Fr Ra Ac Th Pa U Np Pu

Összetett bomlások: sorozatos bomlás

2 tagra: anyaelem+leányelem

$$A = A_1 + A_2$$

anyaelem: egyszerű bomlástörvény

$$-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

leányelem: keletkezés+bomlás

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

Megoldás:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} \left[1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}\right] + N_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right] + N_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

$A_2 = N_2\lambda_2$ és $A_1 = N_1\lambda_1$:

$$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} e^{-\lambda_1 t} \left[1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}\right] + A_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

Az egyenlet megoldása 1.

Legyen $N_2 = u \times v$ és $v = e^{-\lambda_2 t}$

Képezzük a N_2 idő szerinti teljes differenciálhányadosát:

$$\frac{\mathrm{dN_2}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d(uv)}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{uv'+u'v} = -\mathrm{u}\lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 \mathrm{t}} + \mathrm{due}^{-\lambda_2 \mathrm{t}} = \lambda_1 \mathrm{N}_1 - \lambda_2 \mathrm{N}_2$$

Az első sorban a két feltételezést behelyettesítve, majd átrendezve:

$$-u\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} + due^{\lambda_2 t} + u\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0$$

$$due^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} = 0$$

$$\int du = \int \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda\ )t}$$

Megoldás:

$$u = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C$$

Visszahelyettesítünk az N_2-t kifejező egyenletbe:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} + Ce^{-\lambda_2 t}$$

Az egyenlet megoldása 2.

Integrációs állandó számítása*:* t=0-nál N_2=N_{20}:

$$\mathrm{N}_{20} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{N}_{10} + \mathrm{C} \qquad \mathrm{C} = \mathrm{N}_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{N}_{10}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} + \left(N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \right) e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} \left[1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \right] + N_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right] + N_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

Az egyenlet megoldása 3.

Aktivitásban kifejezve, *azaz* $A_2=N_2\lambda_2$ és $A_1=N_1\lambda_1$:

$$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_{10} e^{-\lambda_1 t}\left[1 - e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\right] + A_{20} e^{-\lambda_2 t}$$

leányelem feldúsulása

leányelem kezdeti mennyiségének bomlása

A leányelem maximális mennyisége: szélsőérték keresése

t=0 esetén a leányelem mennyisége ill. aktivitása nulla, vagyis N_2=0.

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\lambda_1\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t_{\max}} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_2 t_{\max}} = 0$$

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Radioaktív egyensúlyok

1. $\lambda_1 < \lambda_2$, azaz az anyaelem lassabban bomlik, mint a leányelem.
2. $\lambda_1 << \lambda_2$, azaz az anyaelem sokkal lassabban bomlik, mint a leányelem.
3. $\lambda_1 > \lambda_2$, azaz az anyaelem gyorsabban bomlik, mint a leányelem.
4. $\lambda_1 \approx \lambda_2$, azaz az anyaelem és a leányelem bomlási sebessége megközelítőleg azonos.

$\lambda_1 < \lambda_2$: kurrens vagy tranziens egyensúly

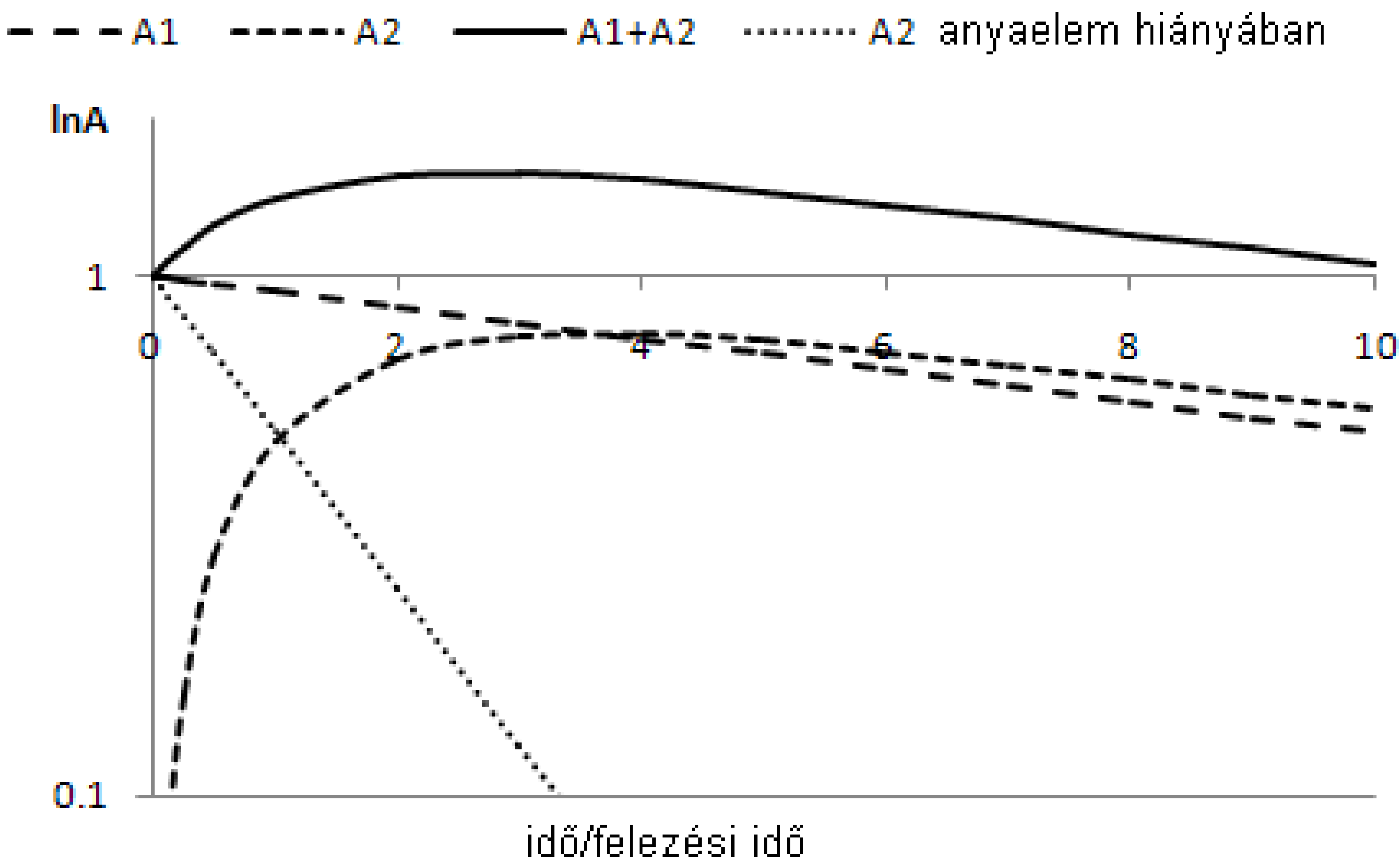
$e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ gyorsan 0 lesz. Ha t=0 N_2=0:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$ ill. $$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1$$

Aktivitásokkal ($N_2=A_2/\lambda_2$ és $N_1=A_1/\lambda_1$): $$A_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} A_1$$

$$\frac{\lambda_1 N_1}{\lambda_2 N_2} = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{A_1}{A_2}$$

Kurrens vagy tranziens egyensúly



$\lambda_1 << \lambda_2$: szekuláris egyensúly

λ_2 mellett a λ_1 elhanyagolható, t=0-nál N_2=0:

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} e^{-\lambda_1 t}\left[1 - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

Mivel az anyaelem bomlása igen lassú $e^{-\lambda_1 t} \approx 1$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10}\left[1 - e^{-\lambda_2 t}\right] \qquad A_2 = A_{10}\left[1 - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

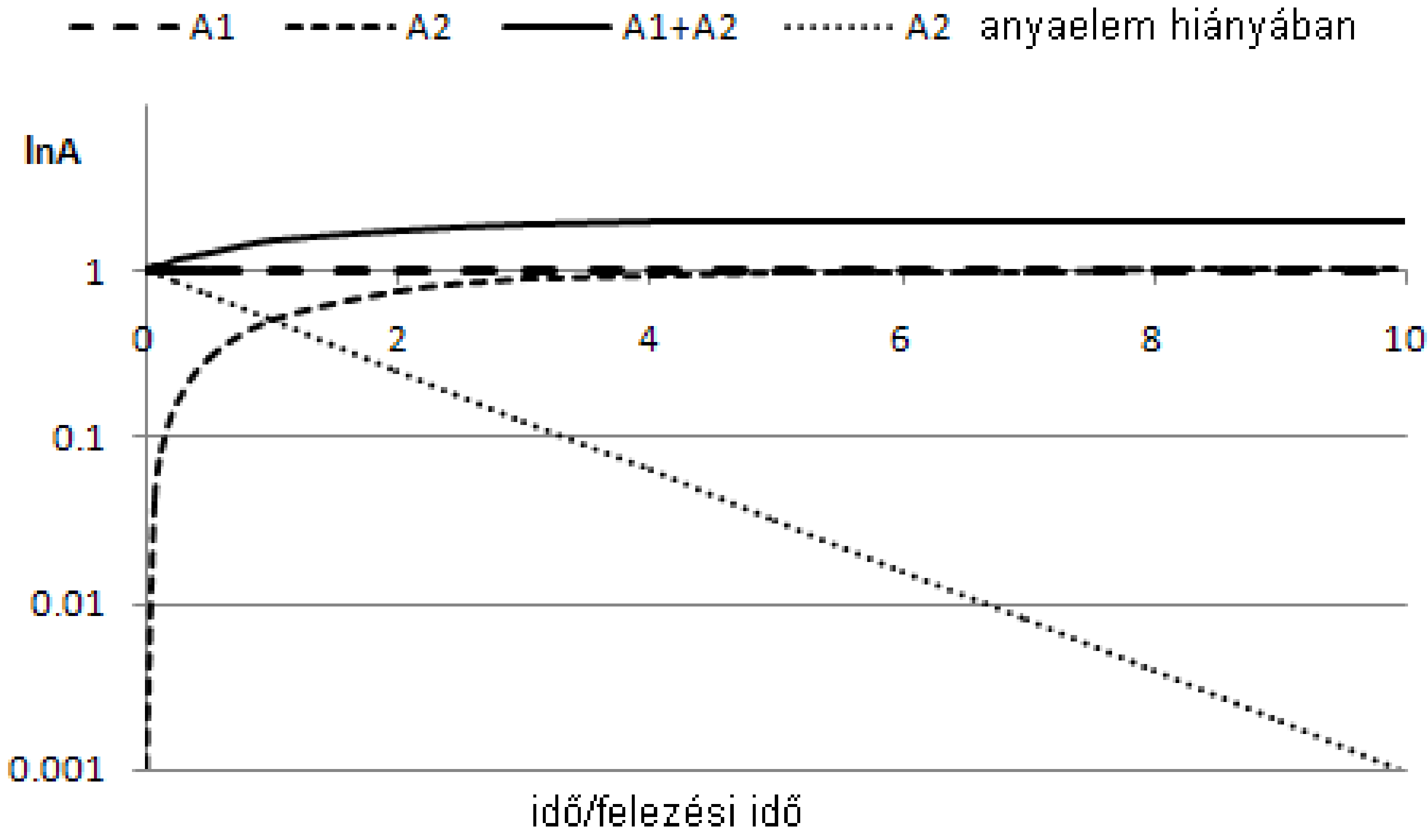
Kb. tíz felezési idő után $e^{-\lambda_2 t} \approx 0$

$$N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} \longrightarrow N_2 \lambda_2 = N_{10} \lambda_1$$

Több tagra:

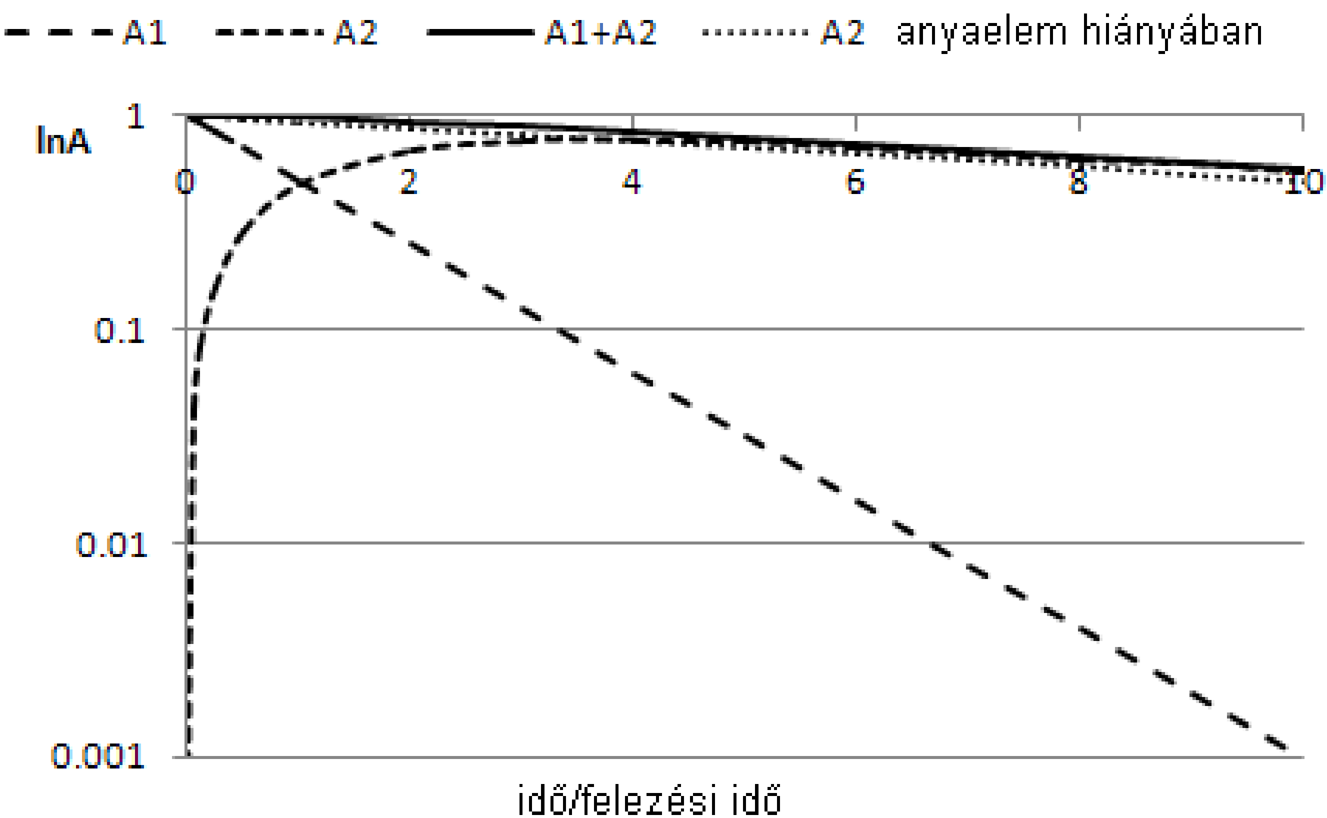
$$N_1 \lambda_1 = N_2 \lambda_2 = ... = N_n \lambda_n = A_1 = A_2 = ... = A_n$$

Szekuláris egyensúly



$$\lambda_1 > \lambda_2$$

$${}^{130}Te(n,\gamma){}^{131}Te \xrightarrow{\beta^-} {}^{131}I$$



$$\lambda_1 \approx \lambda_2$$

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} N_2 = \lambda t N_{10} e^{-\lambda t} = \lambda t N_1$$

$$N_2 = N_1 \lambda t$$

Sorozatos bomlás n tagra

$$-\frac{dN_1}{dt} = \lambda_1 N_1 = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \lambda_{n-1} N_{n-1} - \lambda_n N_n$$

$$N_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^n e^{-\lambda_i t}$$

$$c_i^n = N_{10} \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \lambda_k}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \left(\lambda_k - \lambda_i\right)}$$

3 tagra: $$N_3 = N_{10}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 t}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)} + \frac{\lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_3 t}}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}\right]$$

Bomláskinetikai számítások

- http://www.ehs.washington.edu/rso/calculator/activity_calc.shtm

A radioaktív bomlás típusai

Alfa-bomlás

Jellemzően A>210, kivétel Sm, Nd

$$ {}_{Z}^{A}M \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}M + \alpha $$

$$ \Delta m = M_A - M_{A-4} - m_\alpha - 2m_e $$

$$ \Delta E = 931 MeV \times \Delta m $$

4-9 MeV

Valójában az energia kisebb: magvisszalökődés

$$ p_\alpha + p_{mag} = m_\alpha v_\alpha + Mv = 0 \longrightarrow v = \frac{m_\alpha v_\alpha}{M} $$

m_α és M az alfa-részecske és a keletkező mag tömege

v_α és v pedig az alfa-részecske és a mag sebessége.

Energia: a mag és az alfa-részecske energiájának összege

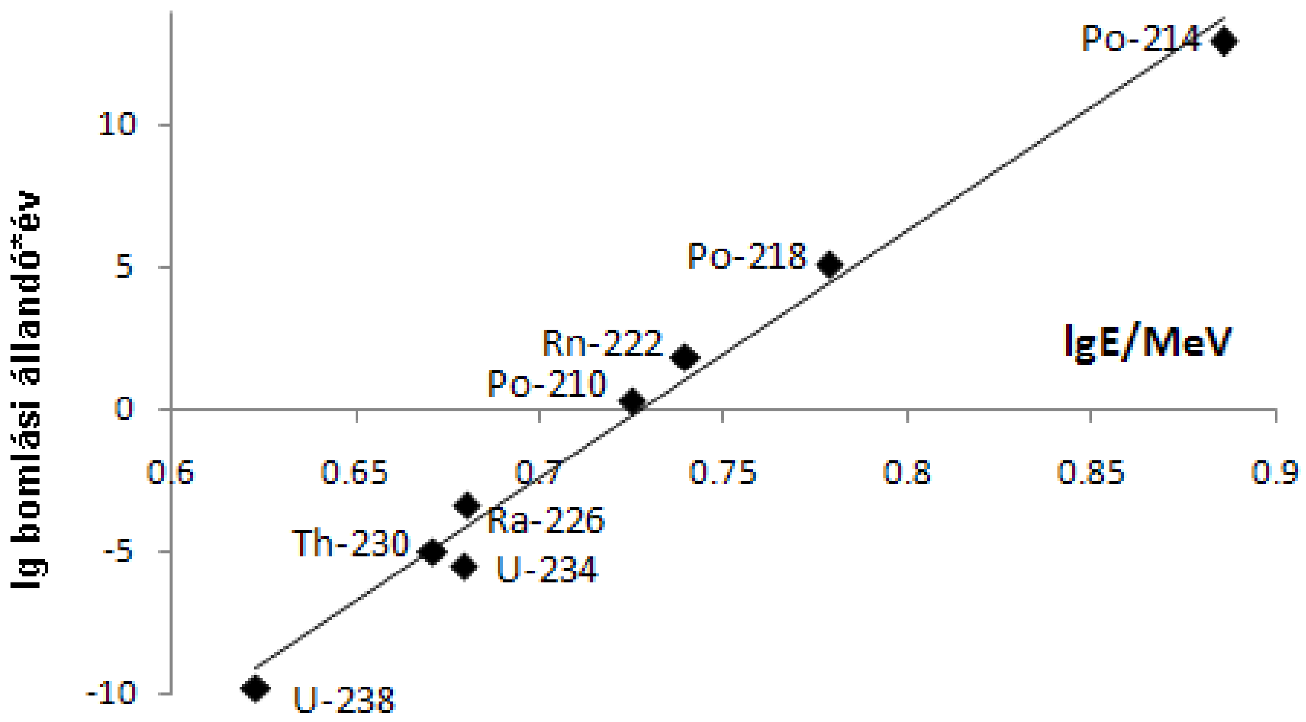
$$ E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 $$

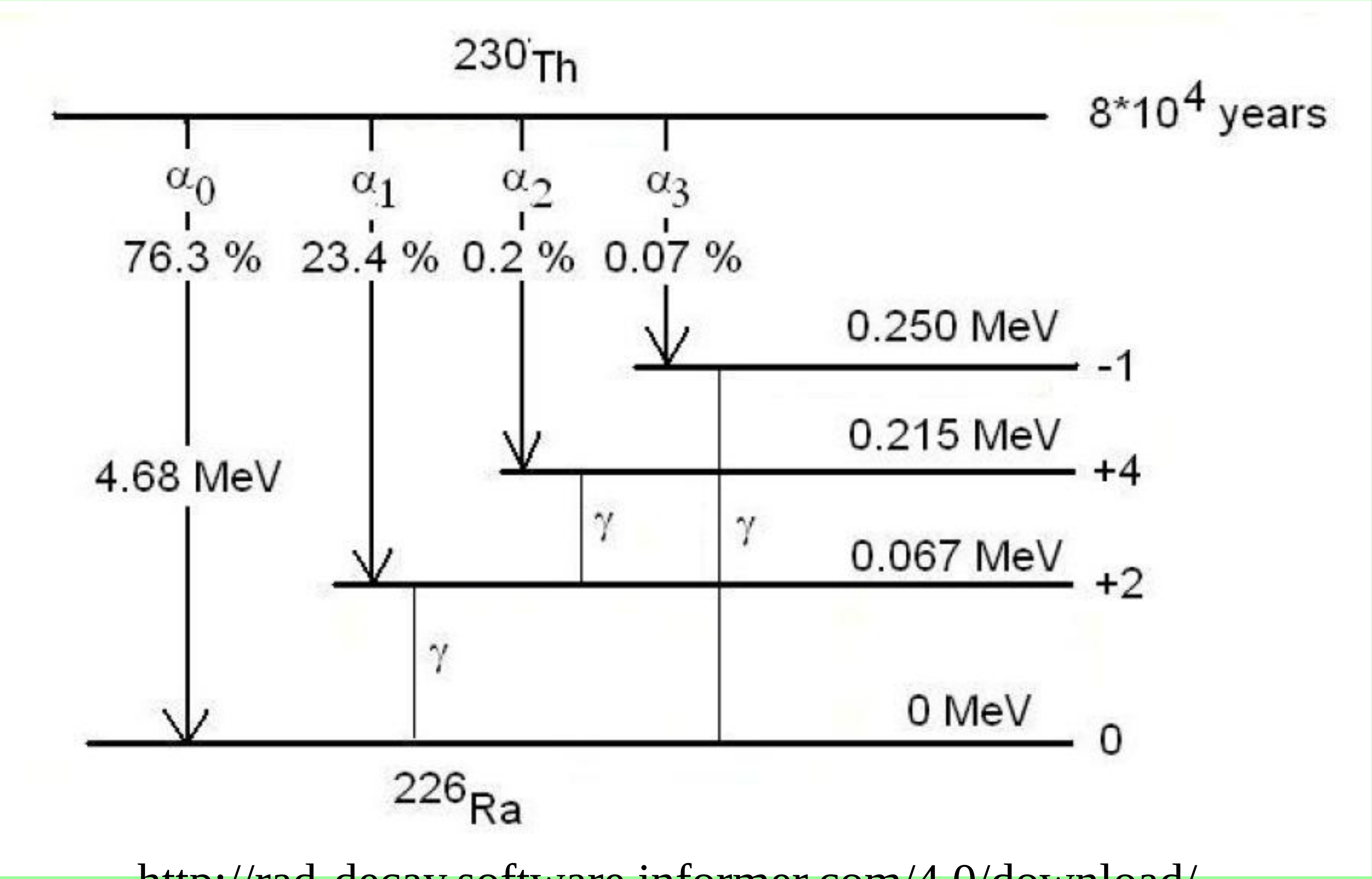
$$ E = \frac{1}{2} M \frac{m_\alpha^2 v_\alpha^2}{M^2} + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{m_\alpha}{M} + 1 \right) $$

Geiger-Nuttal szabály

$$\lg \lambda = a + b \times \lg R$$

$$\lg \lambda = a' + b' \times \lg E$$



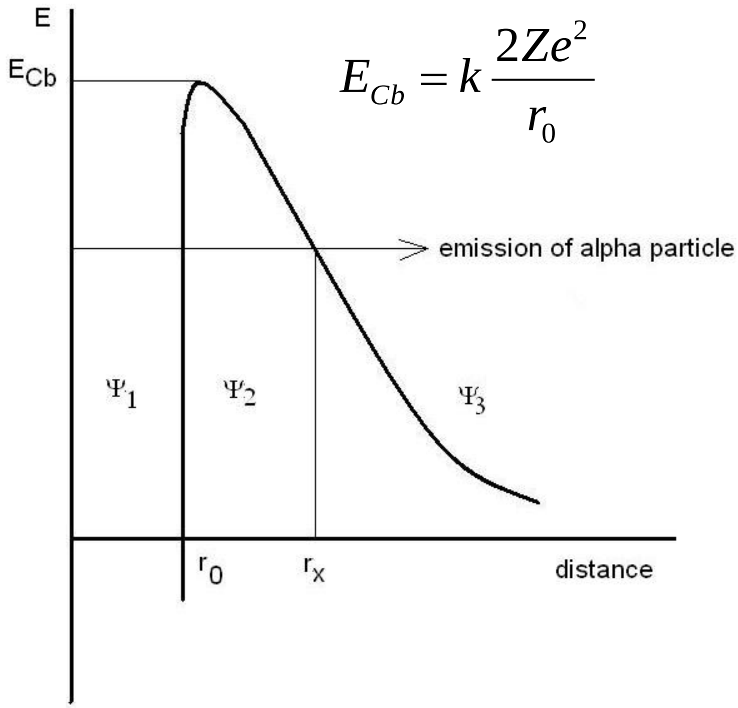


http://rad-decay.software.informer.com/4.0/download/

Az alfa-bomlás értelmezése az alagúteffektus alapján

Az alfa-bomlást leíró modellek:

1. az anyanuklid elkülönülése a leánynuklidra és az alfa-részecskére
2. az alfa-részecske áthaladása azon a potenciálgáton, amelyet a magerők és a Coulomb-erők együtt alakítanak ki. Ez a gát az alfa-részecske és a leánynuklid között lép fel.



$$E_{Cb} = k\frac{2Ze^2}{r_0}$$

r_0 a mag ún. Coulomb-sugara
Z a leánymag rendszáma
2 az alfa-részecske rendszáma
e az elemi töltés
k *a* Coulomb-féle arányossági tényező ($8{,}988 \cdot 10^9$ Nm^2C^{-2}),

E_{Cb} a potenciálgát magassága: kb. 25 MeV
Az alfa-bomlásban keletkező részecskék energiája: 4-9 MeV, vagyis túl kicsi ahhoz, hogy a potenciálgáton áthatoljon

A klasszikus fizika alapján alfa-bomlás nem lenne lehetséges!!!

Az alfa-bomlás értelmezése az alagúteffektus alapján

Megoldás: kvantumfizika – az anyag részecske-hullám kettős természete.

A hullámmechanika szerint minden részecskéhez hozzárendelhető egy hullámfüggvény, amelynek energiája, impulzusa és terjedési iránya megegyezik a részecskéével.

A hullám, azaz az alfa-részecske összes energiája (*E*): $E = h\nu$

ν a részecske frekvenciája, *h* a Planck-állandó

Egy részecske teljes energiája (*E*) a kinetikus (E_{kin}) és a potenciális energia (*U*) összege. A kinetikus energia egy adott *U* potenciálú helyen:

$$E_{kin} = E - U = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{g^2}{2m} \qquad g = \sqrt{2m(E-U)} = hk$$

A hullámfüggvény impulzusa (*g*): $g = hk = h\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{h\nu}{c}$

λ az alfa-részecske hullámhossza; reciproka (*k*) a hullámszám, *c* a fény sebessége vákuumban

A hullám intenzitása (*I*): $I = (\Psi)^2$

ψ a rezgés amplitúdója

I adja meg a részecske tartózkodási valószínűségét a különböző helyeken.

Az alfa-bomlás értelmezése az alagúteffektus alapján

A Schrödinger-egyenlet :

A magban: $\Psi_1 = B_1 e^{2\pi \underline{i}(k_1 r - \nu_1 t)}$

A potenciálgát *U* potenciálú helyén: $\Psi_2 = B_2 e^{2\pi \underline{i}(k_2 \; r - \nu_2 t)}$

A potenciálgáton kívül: $\Psi_3 = B_3 e^{2\pi \underline{i}(k_3 r - \nu_3 t)}$

$$g = \sqrt{2m(E-U)} = hk$$

Ha *U>E, akkor k* imaginárius szám. Mivel *i* is imaginárius szám, akkor a kitevők valós számok, tehát van valószínűsége annak is, hogy az alfa-részecske a potenciálgáton kívül tartózkodik.

Az alfa-részecske potenciálgáton kívüli tartózkodásának (tehát az alfa-bomlás lejátszódásának) relatív valószínűsége a hullámfüggvény amplitúdói négyzetének aránya:

$$\frac{|\Psi_3|^2}{|\Psi_1|^2}$$

Ebből kiszámítható a bomlássebességi állandó!!

Az alfa-bomlás értelmezése az alagúteffektus alapján

Az atommagban az alfa-részecske *v* sebességgel mozog és a potenciálfalhoz másodpercenként $n_ü$-ször ütközik:

$$n_ü = \frac{v}{2r_0}$$

r_0 a magsugár, kétszerese a magátmérő.

Az ütközések száma a részecske de Broglie-hullámhosszából (λ) is megadható, ami maximum a mag mérete lehet:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \approx 2r_0 \longrightarrow v = \frac{h}{2mr_0}$$

$$n_ü = \frac{h}{4mr_0^2}$$

A bomlási állandó az ütközések számának és az alfa-részecske kilépési valószínűségének szorzata:

$$\lambda = \frac{h}{4mr_0^2}\frac{|\Psi_3|^2}{|\Psi_1|^2}$$

Integrálva a hullámfüggvényeket r_0-tól r_x-ig:

$$\lambda = \frac{\mathrm{h}}{4\mathrm{mr}_0^2} exp\left\{-\frac{2\pi}{h}\int_{r_0}^{r_x}\sqrt{2m\frac{2(Z-2)[e]^2}{r}-E}\right\}dr$$

Az alfa-bomlás értelmezése az alagúteffektus alapján

A bomlási állandó (λ) értéke 1/s-ban:

$$lg\,\lambda = 20.47 - 1.191.10^{9}\,\frac{Z-2}{v}\,\frac{1}{\sqrt{E}} + 4.084.10^{6}\,\sqrt{Z-2}.\sqrt{r_0}$$

Az energia növekedésével a jobb oldal második tagja csökken, tehát a bomlási állandó nő.

Hasonlóság az empírikus Geiger-Nuttal-szabályhoz:

$$\lg \lambda = a' + b' \times \lg E$$

A bomlási állandóból a magsugár (r_0) is számítható; a kapott érték azonban mindig kisebb, mint az alfa-visszaszóródás alapján számított érték, ahol tulajdonképpen a r_x-et kapjuk.

Pl. ^{238}U-mag: bomlási állandó alapján 9,5*10^{-15} m

alfa-szóródás alapján 4*10^{-14} m.